

ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM.

1

SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN
CỦA HÀM SỐ

I. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ.

- 1 Nhắc lại định nghĩa (SGK).
- 2 Tính đơn điệu của hàm số và dấu của đạo hàm.

Định lý

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K

- a) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K .
- b) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K .

Chú ý: Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in K$ thì $f(x)$ không đổi trên K .

- 3 Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số.

Bước 1: Tìm tập xác định.

Bước 2: Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

Bước 3: Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

Bước 4: Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

- 4 Định lý mở rộng.

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K

+ Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K .

+ Nếu $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K .

II. VÍ DỤ MINH HỌA

✎ Xét tính đơn điệu của hàm số:

a) $y = x^4 - 2x^2 + 1$

- TXĐ: $D = \mathbb{R}$

- $y' = 4x^3 - 4x$

- Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		-	0	+	0	-	0	+
y	$+\infty$		0	1	0		$+\infty$	

- Kết luận: hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$

📖 Lưu ý: Xét dấu hàm số bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

Cho $y = 0$. Nếu phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì ta có cách xét dấu như sau: xét từ bên phải qua, ô cuối cùng cùng dấu với hệ số a , sau đó đan dấu.

b) $y = \frac{x-1}{x+1}$

- Điều kiện: $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

- $y' = \frac{1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	$\nearrow$ 1	$\nearrow$ $+\infty$	$\nearrow$ 1 $-\infty$

- Kết luận: hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

 Lưu ý:

❶ Đạo hàm của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

❷ Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ luôn đồng biến **hay** nghịch biến trên từng khoảng xác định.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

 Xét tính đơn điệu của hàm số:

a) $y = x^3 - x^2 - x + 3$

b) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$

c) $y = 2x^3 + 6x^2 + 6x - 7$

d) $y = \frac{x-1}{x-2}$

2

CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

I. KHÁI NIỆM CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU.

❶ Định nghĩa: (SGK)

❷ Chú ý:

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại (hoặc cực tiểu) tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực đại (điểm cực tiểu) của hàm số; $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) của hàm số, kí hiệu là $f_{CD}(f_{CT})$.
- Điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại (điểm cực tiểu) của đồ thị hàm số.
- Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) còn gọi là cực đại (cực tiểu) và được gọi chung là cực trị của hàm số.
- Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và đạt cực đại (hoặc cực tiểu) tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

❸ Định lí: (SGK)

❹ Quy tắc tìm cực trị.

Quy tắc 1:

Bước 1: Tìm tập xác định

Bước 2: . Tìm $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 3: Lập bảng biến thiên

Bước 4: Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

Quy tắc 2:

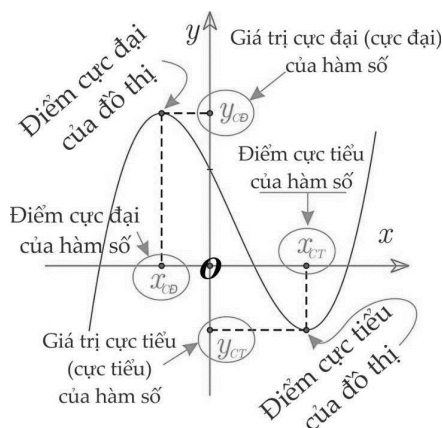
Bước 1: Tìm tập xác định.

Bước 2: Tìm $f'(x)$. Tìm các nghiệm $x_i (i = 1; 2; \dots)$ của phương trình $f'(x) = 0$.

Bước 3: Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.

Bước 4:

- Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_i .
- Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_i .

5 Hình vẽ.**II. VÍ DỤ MINH HỌA.**

Ví dụ 1: Tìm các điểm cực trị của hàm số (quy tắc 1)

a) $y = x^3 - x^2 - x + 3$

Giải

- TXĐ: $D = \mathbb{R}$

- $y' = 3x^2 - 2x - 1$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	$\frac{86}{27}$	2	$+\infty$	

- Kết luận:

❑ Điểm cực đại của hàm số là $x_{\text{CD}} = -\frac{1}{3}$.

❑ Điểm cực tiểu của hàm số là $x_{\text{CT}} = 1$.

b) $y = \frac{3x+1}{x+1}$

- TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

- $y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$

- Vậy hàm số đã cho không có cực trị (do chú ý thứ 4)

Ví dụ 2: Tìm cực trị của hàm số (quy tắc 2)

$$y = x^4 - 2x^2 + 1$$

- TXĐ: $D = \mathbb{R}$

- $y' = 4x^3 - 4x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

- $y'' = 12x^2 - 4$

Ta có:

$y''(\pm 1) = 8 > 0$: hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1, y_{\text{CT}} = 0$.

$y''(0) = -4 < 0$: hàm số đạt cực đại tại $x = 0, y_{\text{CD}} = 1$.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1. Áp dụng quy tắc 1, tìm các điểm cực trị của hàm số.

a) $y = x^4 + 2x^2 - 3$

b) $y = \frac{2x+1}{x-1}$

c) $y = x + \frac{1}{x}$

Bài 2. Áp dụng quy tắc 2, tìm các điểm cực trị của hàm số.

a) $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$

b) $y = x^5 - x^3 - 2x + 1$

3

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ.

I. ĐỊNH NGHĨA.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

- Số M gọi là **GTLN** của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu:
$$\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = M \end{cases}$$

Kí hiệu: $M = \max_{x \in D} f(x)$

- Số m gọi là **GTNN** của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu:
$$\begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = m \end{cases}$$

Kí hiệu: $m = \min_{x \in D} f(x)$

II. PHƯƠNG PHÁP TÌM GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ.

① Định lí.

Mọi hàm số liên tục trên đoạn đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

② Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một đoạn.

Bước 1: Hàm số đã cho $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$. Tìm các điểm

$x_1, x_2, \dots, x_n$ trên khoảng $(a; b)$ tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 2: Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$.

Bước 3: Khi đó:

$$\max_{[a,b]} f(x) = \max \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}.$$

$$\min_{[a,b]} f(x) = \min \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}.$$

➡ Ghi chú:

□ Nếu $y = f(x)$ đồng biến, liên tục trên $[a; b]$ thì $\begin{cases} \min_{[a; b]} f(x) = f(a) \\ \max_{[a; b]} f(x) = f(b) \end{cases}$

□ Nếu $y = f(x)$ nghịch biến, liên tục trên $[a; b]$ thì $\begin{cases} \min_{[a; b]} f(x) = f(b) \\ \max_{[a; b]} f(x) = f(a) \end{cases}$

□ Hàm số liên tục trên một khoảng *có thể* không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó.

III. VÍ DỤ MINH HỌA.

Tính giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[0; 5]$

- Xét hàm số trên đoạn $[0; 5]$.

$$- y' = 3x^2 - 6x - 9$$

$$- \text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1(1) \\ x = 3(n) \end{cases}$$

$$- y(0) = 35; y(5) = 40; y(3) = 8$$

$$\text{Vậy: } \max_{[0; 5]} y = 40; \min_{[0; 5]} y = 8$$

b) $y = \frac{x-1}{x+2}$ trên đoạn $[0; 1]$

- Xét hàm số trên đoạn $[0; 1]$.

$$- y' = \frac{3}{(x+2)^2} > 0, \forall x \in [0; 1]$$

$$- y(0) = -\frac{1}{2}; y(1) = 0$$

Vậy: $\text{Max}_{[0;1]} y = 0$; $\text{Min}_{[0;1]} y = -\frac{1}{2}$

IV. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Tính giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = x^4 - 3x^2 + 2$ trên đoạn $[2; 5]$.

b) $y = \frac{2-x}{1-x}$ trên đoạn $[2; 4]$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP.

Câu 1. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng:

- A. 1. B. 37. C. 33. D. 12.

Câu 2. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 24x$ trên đoạn $[2; 19]$ bằng:

- A. $32\sqrt{2}$. B. -40 . C. $-32\sqrt{2}$. D. -45 .

Câu 3. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \frac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0; 2]$.

- A. $M = \frac{1}{3}$. B. $M = -\frac{1}{3}$. C. $M = 5$. D. $M = -5$

Câu 4. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng:

- A. $\frac{15}{2}$. B. 5. C. $\frac{29}{3}$. D. 3.

Câu 5. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{4-x^2}$ là:

- A. 2. B. 0. C. 4. D. 1.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; -1)$.

B. $(0; 1)$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	4	-1	$+\infty$

C. $(-1;1)$.D. $(-1;0)$

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-		-	0	+	

Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$ C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$

Câu 8. Cho hàm số có bảng biến thiên như sau

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0; 2)$.B. $(0; +\infty)$.C. $(-2; 0)$.D. $(2; +\infty)$.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		1	3	1	$+\infty$

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
y'		+	0	-
y	$-\infty$	$+\infty$	4	$-\infty$

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ và $(3; +\infty)$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		1		-2		$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại:

A. $x = -2$.

B. $x = 2$.

C. $x = 1$.

D. $x = -1$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		1		5		$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng:

A. 5

B. 2

C. 0

D. 1

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		3		0		$+\infty$

Tìm giá trị cực đại y_{CD} và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho.

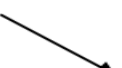
A. $y_{CD} = 2$ và $y_{CT} = 0$.

B. $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = 0$.

C. $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = -2$.

D. $y_{CD} = -2$ và $y_{CT} = 2$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			3			$+\infty$
							
			0		0		

Mệnh đề nào dưới đây **sai**

A. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3.

B. Hàm số có hai điểm cực tiểu.

C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0.

D. Hàm số có ba điểm cực trị.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$			
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại:

A. $x = 2$.

B. $x = -2$.

C. $x = 1$.

D. $x = 3$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.